Economia Monetária e Financeira
Aula T5

4. Teoria da carteira

4.3. Conjunto de oportunidades de investimento

4.4. A moeda como ativo financeiro - teorema da separação de Tobin

- **Bibliografia**

M. Abreu, A. Afonso, V. Escária, C. Ferreira, *Economia Monetária e Financeira*, 3ª edição, Escolar Editora, 2018, CAP 4.

Conjunto de oportunidades de investimento (1/14)

- Conjunto das oportunidades de investimento: conjunto de combinações rendimento-risco para uma carteira de activos.
- Caso de **carteira com 2 activos**:

E(R1)=6%, E(R2)=10%.
σ_1= 3, σ_2=7.

Note-se que:
E(R2)>E(R1);
$\sigma_2 > \sigma_1$.

$$\begin{cases} \bar{R}_p = x_1 \bar{R}_1 + (1 - x_1) \bar{R}_2 \\ \sigma_p^2 = x_1^2 \sigma_1^2 + x_2^2 \sigma_2^2 + 2 x_1 x_2 \sigma_{12} = x_1^2 \sigma_1^2 + x_2^2 \sigma_2^2 + 2 x_1 x_2 \sigma_1 \sigma_2 \rho_{12} \end{cases}$$

Conjunto de oportunidades de investimento (2/14)

- Coeficiente de correlação ρ_{ij}=1

$$\bar{R}_p = \frac{\sigma_1 \bar{R}_2 - \sigma_2 \bar{R}_1}{\sigma_1 - \sigma_2} + \frac{\bar{R}_1 - \bar{R}_2}{\sigma_1 - \sigma_2} \sigma_p \qquad x_1 = \frac{\sigma_p - \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2}.$$

(ver deduções no livro)

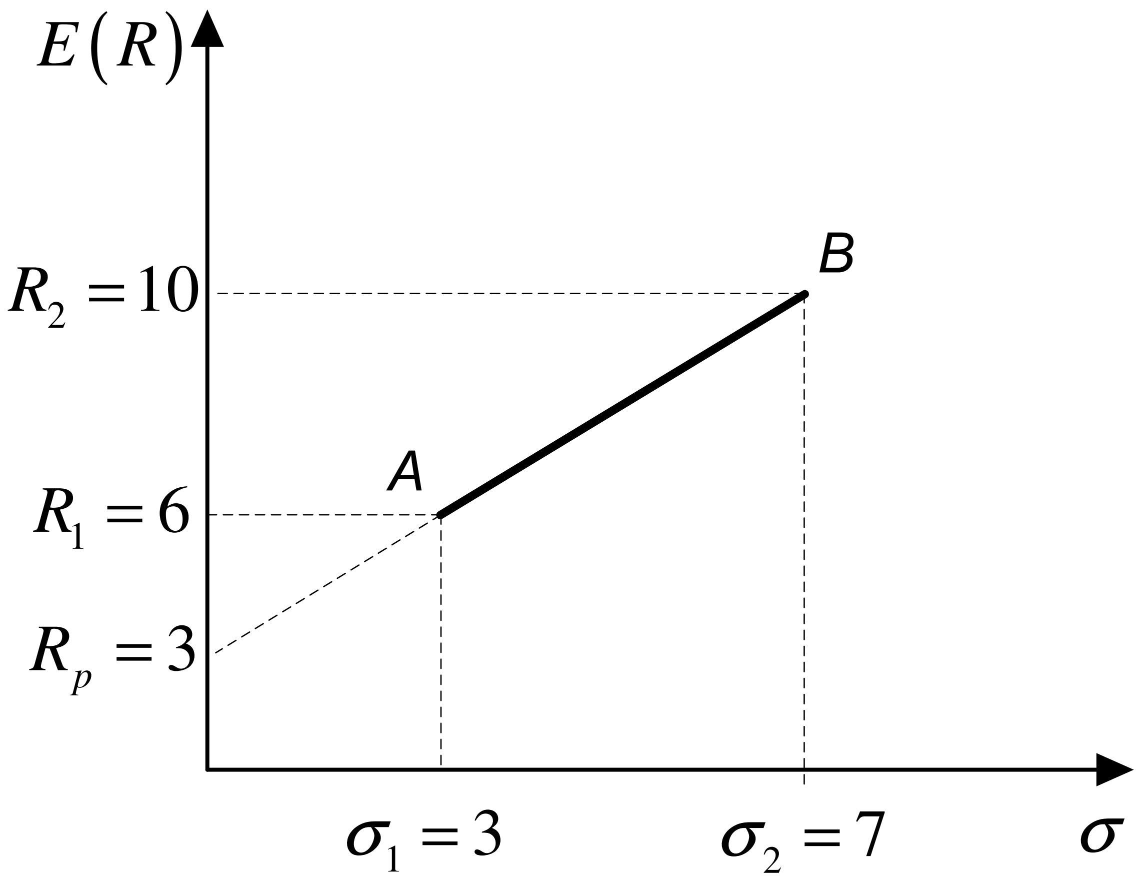
- No caso concreto:

$$\bar{R}_p = \frac{3 \times 10 - 7 \times 6}{3 - 7} + \frac{6 - 10}{3 - 7} \sigma_p = 3 + \sigma_p$$

Conjunto de oportunidades de investimento (3/14)

- Coeficiente de correlação ρ_{ij}=1

$$\bar{R}_p = 3 + \sigma_p$$



Conjunto de oportunidades de investimento (4/14)

- Coeficiente de correlação ρ_{ij}=-1

$$\boxed{\sigma_p^2 = x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2 + 2x_1x_2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2}$$

$$\sigma_p^2 = [x_1\sigma_1 - x_2\sigma_2]^2 = [x_1\sigma_1 - (1-x_1)\sigma_2]^2$$

  - **Dois segmentos**:

Declive negativo, E(R2)>E(R1)

$$\bar{R}_p = \frac{\sigma_2\bar{R}_1 + \sigma_1\bar{R}_2}{\sigma_1+\sigma_2} + \frac{\bar{R}_1 - \bar{R}_2}{\sigma_1+\sigma_2}\sigma_p$$

$$x_1 = \frac{\sigma_p + \sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}$$

Declive positivo, E(R2)>E(R1)

$$\bar{R}_p = \frac{\sigma_1\bar{R}_2 + \sigma_2\bar{R}_1}{\sigma_1+\sigma_2} + \frac{\bar{R}_2 - \bar{R}_1}{\sigma_1+\sigma_2}\sigma_p$$

$$x_1 = \frac{-\sigma_p + \sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}$$

Conjunto de oportunidades de investimento (5/14)

- Coeficiente de correlação ρ_{ij}=-1
  - (ver deduções no livro)

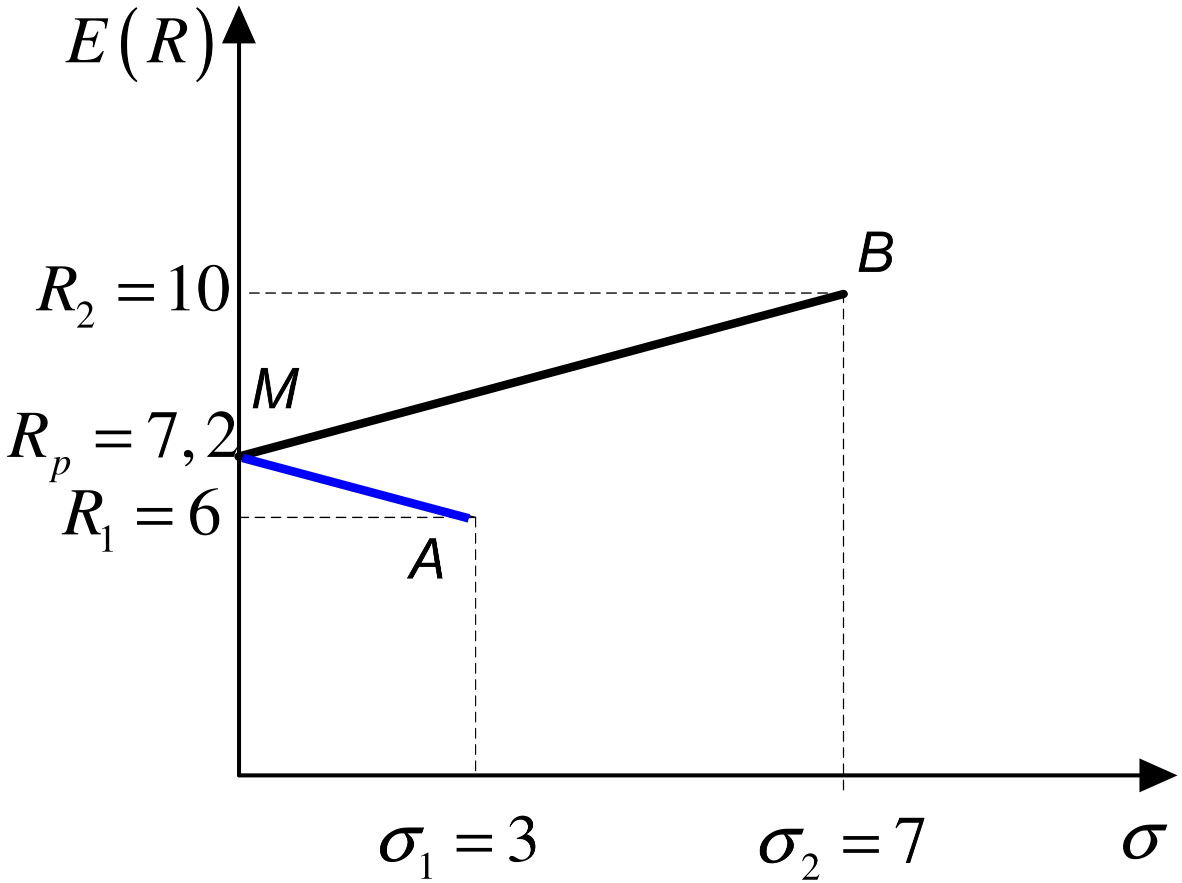
- No caso concreto:

$$\bar{R}_p = \frac{7\times 6 + 3\times 10}{3+7} + \frac{6-10}{3+7}\sigma_p = 7{,}2 - 0{,}4\sigma_p$$

$$\bar{R}_p = \frac{7\times 6 + 3\times 10}{3+7} + \frac{10-6}{3+7}\sigma_p = 7{,}2 + 0{,}4\sigma_p$$

Conjunto de oportunidades de investimento (6/14)

- Coeficiente de correlação ρ_{ij}=-1



$$\bar{R}_p = 7,2 + 0,4\sigma_p$$

$$\bar{R}_p = 7,2 - 0,4\sigma_p$$

Conjunto de oportunidades de investimento (7/14)

- Coeficiente de correlação ρ_{ij}=0
- O conjunto de oportunidades de investimento, com 2 activos, é uma hipérbole:

$$\boxed{\left(\bar{R}_1-\bar{R}_2\right)^2\sigma_p^2-a\left(\bar{R}_p-b\right)^2=\bar{R}_2^2\sigma_1^2+\bar{R}_1^2\sigma_2^2-ab^2}$$

$$a=\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right) \qquad b=\frac{\bar{R}_2\sigma_1^2+\bar{R}_1\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$$

- ou ainda

$$\boxed{m\sigma_p^2-a\left(\bar{R}_p-b\right)^2=p} \qquad m=\left(\bar{R}_1-\bar{R}_2\right)^2 \qquad p=\bar{R}_2^2\sigma_1^2+\bar{R}_1^2\sigma_2^2-ab^2$$

- hipérbole com eixo em E(R)=b e assímptotas $E(R)=b\pm\sqrt{\dfrac{m}{a}}$

Conjunto de oportunidades de investimento (8/14)

- Coeficiente de correlação ρ_{ij}=0
- No nosso exemplo:

$$E(R) = b \pm \sqrt{\frac{m}{a}}$$

$$a = 3^2 + 7^2 = 58$$

$$b = \frac{10 \times 9 + 6 \times 49}{9 + 49} = \frac{384}{58} = 6,62$$

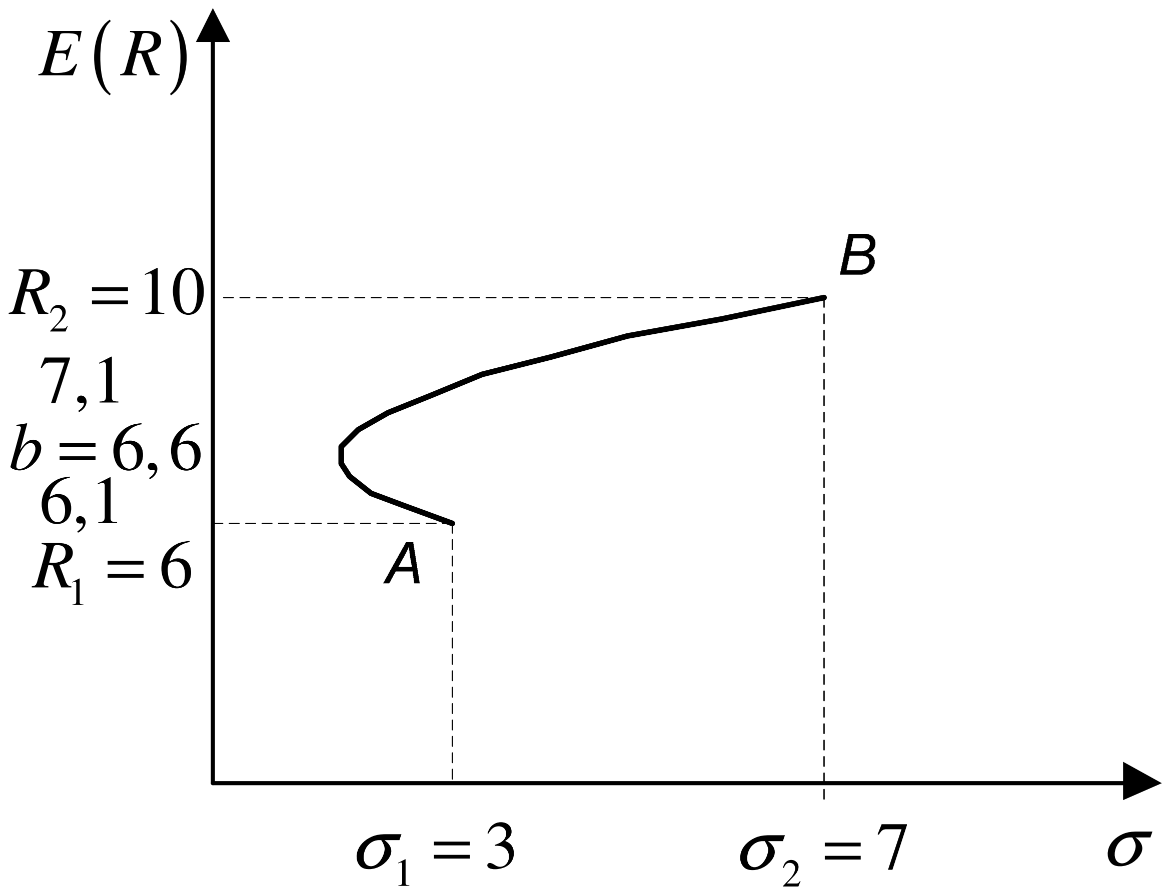
$$m = (6 - 10)^2 = 16$$

$$p = 100 \times 9 + 36 \times 49 - 58 \times 43,83 = 121,66$$

$$E(R) = 6,6 \pm \sqrt{16/58} = 6,6 \pm 0,5$$

Conjunto de oportunidades de investimento (9/14)

- Coeficiente de correlação ρ_{ij}=0



Conjunto de oportunidades de investimento (10/14)

- Coeficiente de correlação ρ_{ij}=0
- **Carteira de risco mínimo**: $d\sigma_p/dx_1$=0

$$\sigma_p = (x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2)^{1/2}$$

$$\frac{d\sigma_p}{dx_1} = \frac{1}{2}\left[x_1^2\sigma_1^2 + (1-x_1)^2\sigma_2^2\right]^{-1/2} \times \left[2x_1\sigma_1^2 - 2(1-x_1)\sigma_2^2\right] = 0$$

$$\frac{x_1\sigma_1^2 + x_1\sigma_2^2 - \sigma_2^2}{\left[x_1^2\sigma_1^2 + (1-x_1)^2\sigma_2^2\right]^{1/2}} = 0$$

$$x_1 = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

Conjunto de oportunidades de investimento (11/14)

- Coeficiente de correlação ρ_{ij}=0
- **Carteira de risco mínimo**: $d\sigma_p/dx_1$=0
- No nosso exemplo:

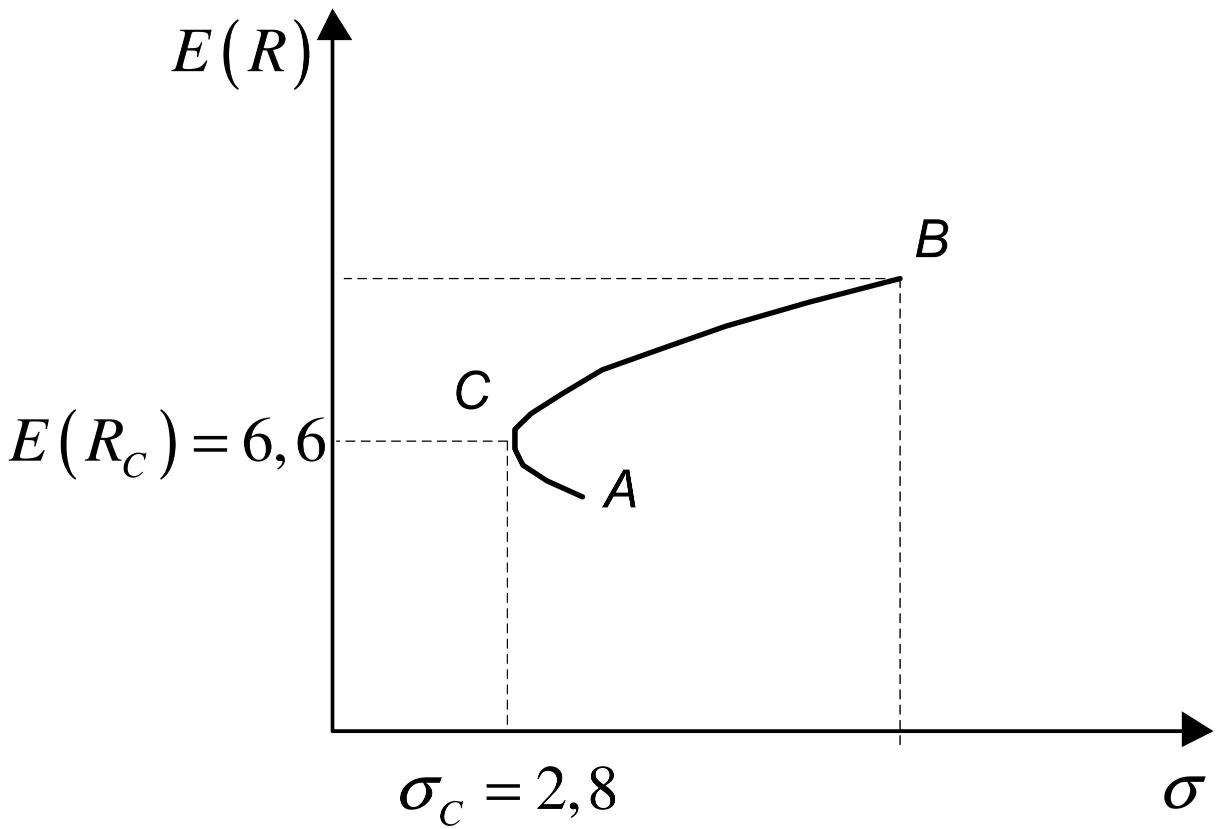
$$x_1 = \frac{7^2}{3^2 + 7^2} = \frac{49}{58} \cong 0{,}84$$

$$x_2 \cong 0{,}16$$

$$\sigma_p^{\ 2} = 0{,}84^2 \times 3^2 + 0{,}16^2 \times 7^2 = 7{,}60 \qquad \sigma_p = 2{,}76$$

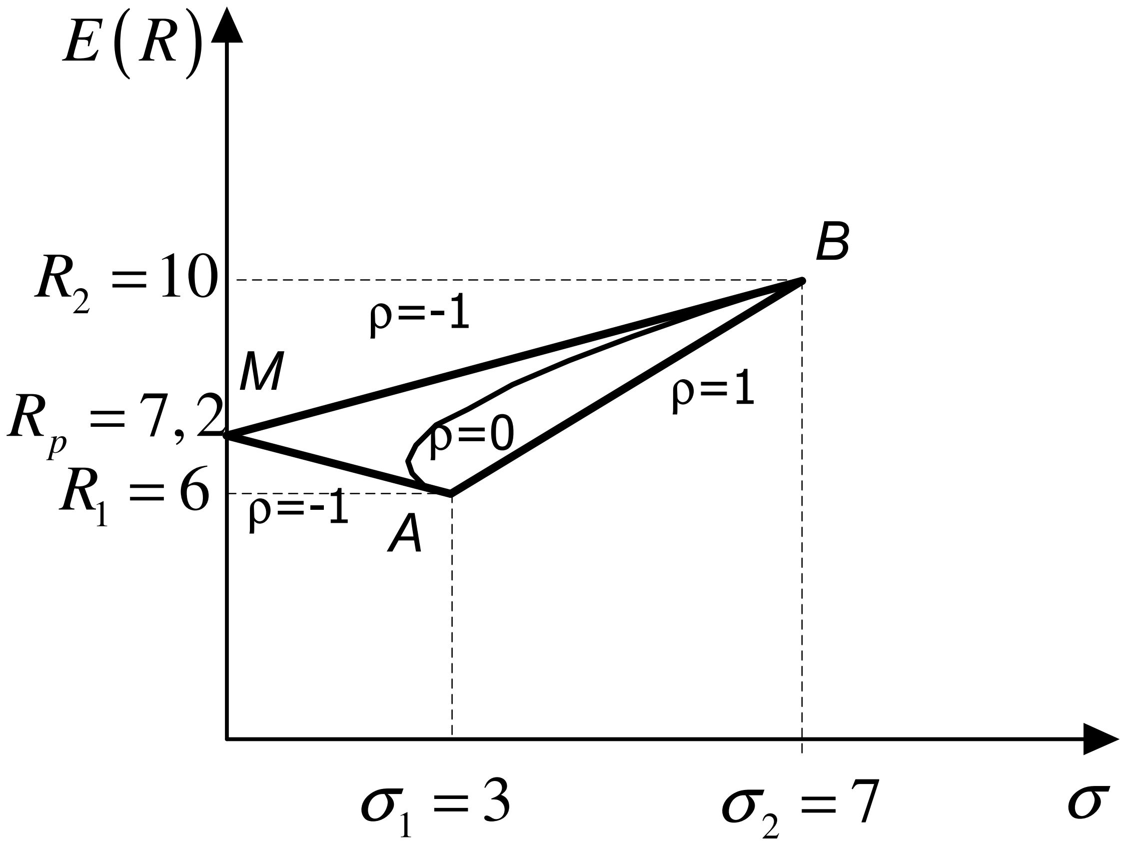
Conjunto de oportunidades de investimento (12/14)

- Coeficiente de correlação ρ_{ij}=0
- **Carteira de risco mínimo**: $d\sigma_p/dx_1$=0: $E(R_p)$=6,6; σ_p=2,8



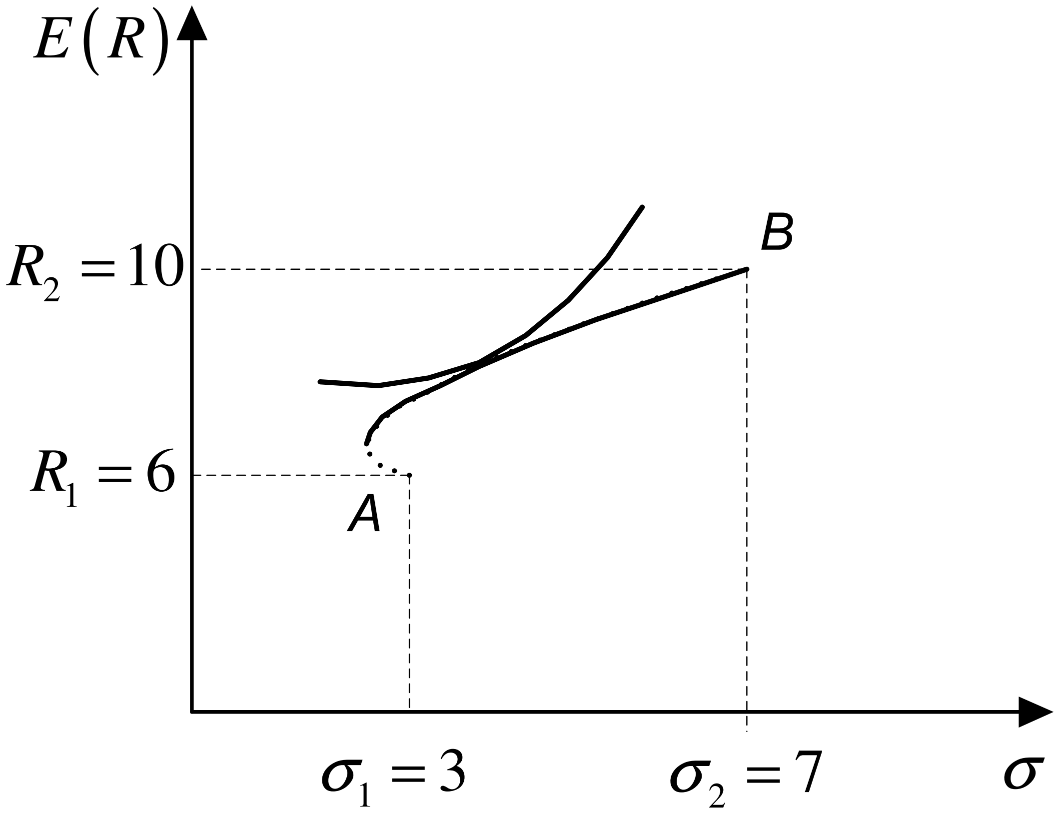
Conjunto de oportunidades de investimento (13/14)

- Lugar geométrico das oportunidades de investimento



Conjunto de oportunidades de investimento (14/14)

- Fronteira eficiente



Carteiras com: menor risco do que outras com a mesma rentabilidade; ou com maior rendimento do que outras carteiras com o mesmo risco.

A moeda como activo financeiro: teorema da separação de Tobin (1/2)

- Activo sem risco, *F*, σ_F=0; taxa de rentabilidade fixa R_F;
- Activo com risco, *m*, $\sigma_m \neq 0$; taxa de rentabilidade, R_m.

$$\begin{cases} \overline{R}_p = x_F R_F + (1 - x_F)\overline{R}_m \\ \sigma_p^2 = (1 - x_F)^2 \sigma_m^2 \\ \text{ou} \\ \sigma_p = (1 - x_F)\sigma_m \end{cases} \qquad x_F = \frac{\sigma_m - \sigma_p}{\sigma_m}$$

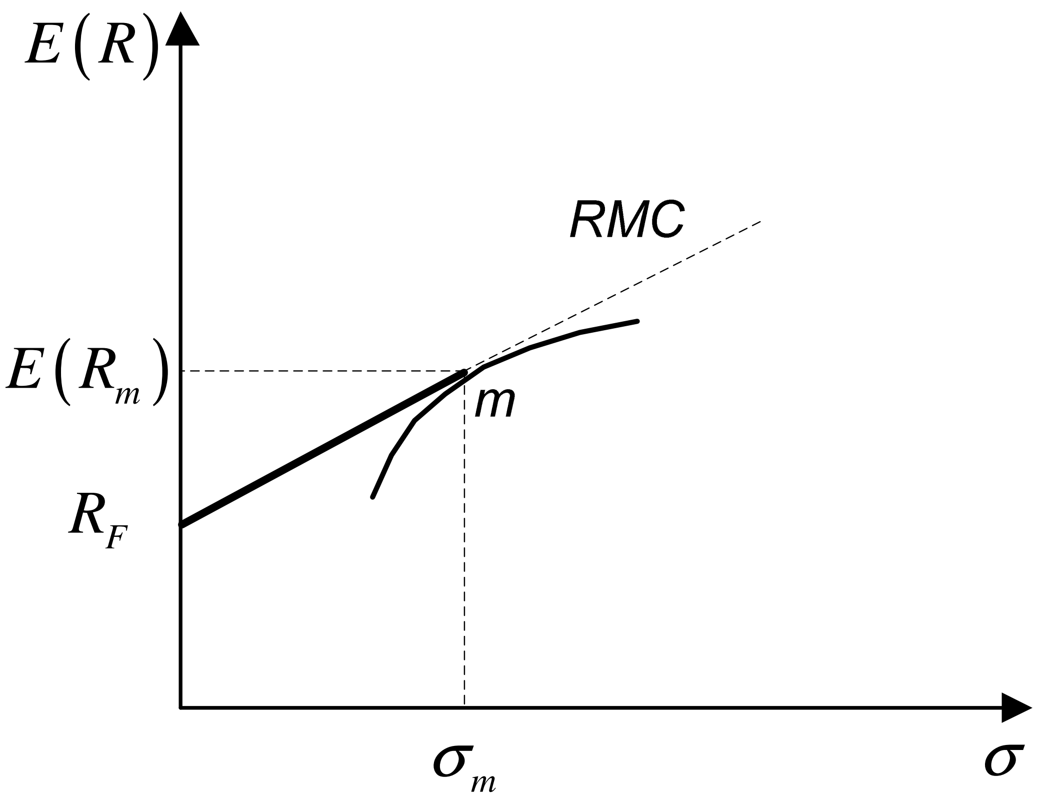
$$\boxed{\overline{R}_p = R_F + \frac{\overline{R}_m - R_F}{\sigma_m}\sigma_p}$$

Recta do Mercado de Capitais (RMC)

James Tobin (1958). "Liquidity preference as behaviour towards risk", *Review of Economic Studies*, 25(1), 65-86.

A moeda como activo financeiro: teorema da separação de Tobin (2/2)

- A tracejado, o investidor pede dinheiro emprestado, à taxa R_F, para investir em *m*. *m* é uma carteira eficiente, "carteira de mercado".



Teorema da Separação: os investidores, qualquer que seja a respectiva riqueza inicial e atitude perante o risco, compõem as suas carteiras óptimas combinando activo sem risco (moeda) e activo com risco.